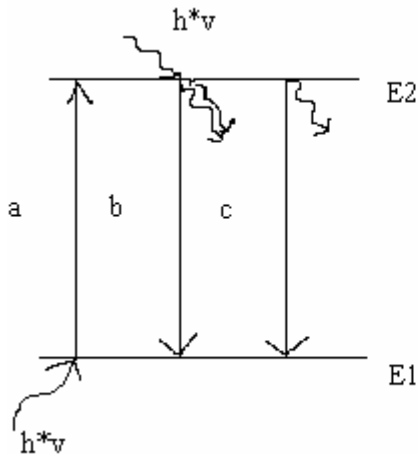


Kohärenzlänge und spektrale Bandbreite von Lasern

Sven Siebler
Alexander Zulauf

Einleitung:

laser: light amplification by stimulated emission of radiation
(Lichtverstärkung durch induzierte Emission von Strahlung)



a : induzierte Absorption = Molekül wird durch Licht angeregt

b: induzierte Emission = Molekül "fällt" in seinen ursprünglichen Zustand zurück, verursacht durch Lichteinwirkung

c: spontane Emission = angeregtes Molekül "fällt" in seinen ursprünglichen Zustand zurück ohne Lichteinwirkung

Ein Laser besteht im Prinzip aus einem Medium und einem Resonator (sehr vereinfachte Beschreibung). In dem Medium (in unserem Fall Kryptongas) werden Moleküle durch Blitzlicht oder elektrische Entladung aus dem Grundzustand E1 in den Zustand E2 angeregt. Solange sich mehr Moleküle im Grundzustand befinden, erfolgt eine Nettoabsorption. Befinden sich nach einer Zeit t mehr Moleküle im angeregten Zustand als im Grundzustand, spricht man von einer Besetzungsinversion. Dann bewirkt eine weitere Lichteinwirkung eine induzierte Emission. Das heißt, dass das einfallende Licht verstärkt wird. Der Resonator, in dem das Lasermedium eingeschlossen ist, besteht aus zwei Spiegeln, zwischen denen das Licht hin und her reflektiert wird. Dieser Vorgang erzeugt nach einer kurzen Zeit eine sehr große Strahlungsdichte. Einer der Spiegel ist zu einem geringen Prozentsatz durchlässig, so dass man einen geringen Teil dieser Strahlung entnehmen kann. Dadurch, dass ein großer Teil der Strahlung im Resonator bleibt, wird das Medium fortlaufend angeregt und die Besetzungsinversion kann aufrechterhalten werden. Es entsteht ein Kreislauf. Im Resonator wird nur eine Art Strahlung erzeugt, d.h. diese besitzt eine bestimmte Frequenz, Ausbreitungsrichtung und Polarisation. Es werden nur die Photonen reflektiert und verstärkt, die sich parallel zur Resonatorachse bewegen. Alle anderen strahlen in die Umgebung ab. Deshalb ist Laserlicht stark gebündelt und kohärent.

Kohärent bedeutet, dass die elektromagnetischen Wellen alle in Phase schwingen. Man unterscheidet zwischen räumlicher und zeitlicher Kohärenz. Räumliche Kohärenz bedeutet, dass die Wellen über dem ganzen Querschnitt des Laserstrahls in Phase sind. Man spricht von zeitlicher Kohärenz, wenn Wellen nach einer Wegstrecke immer noch in Phase sind. Diese Wegstrecke wird als Kohärenzlänge l_k bezeichnet und ist definiert als der Quotient aus dem Quadrat der Wellenlänge und der spektralen Bandbreite $\Rightarrow l_k = \lambda^2 / \Delta\lambda$. Dabei ist die spektrale Bandbreite als die Linienbreite gemessen bei der halben Höhe des Intensitätsmaximums definiert. Ist der Strahl ideal monochromatisch (Laser kommt diesem Ideal sehr nahe), so geht $\Delta\lambda$ gegen Null und l_k gegen unendlich. Besitzt der Strahl eine große Bandbreite, z.B. Sonnenlicht oder Glühlampe, so ist die Kohärenzlänge sehr klein.

Kohärenz ist eine Voraussetzung für die Interferenz und hat einen Einfluss auf die Intensität interferierender Wellen. Überlagern sich zwei kohärente Wellen, so kann es zu einer konstruktiver oder destruktiver Interferenz kommen.

Konstruktive Interferenz

versus

destruktive Interferenz

- beide Wellen sind in Phase
- Wellenberge fallen zusammen
- Phasendifferenz ist ein geradzahliges von π
- die Amplituden addieren sich
- bei der Gesamtintensität wird der Interferenzterm addiert:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$
- bei gleichen Amplituden und Intensitäten der Teilwellen beobachtet man eine Verdoppelung der Amplitude und eine vierfache Intensität
Allgemein: $E = NE_1$ und $I = N^2 I_1$

- Wellen sind gegenphasig
- Wellenberg trifft Wellental
- Phasendifferenz ist ein ungeradzahliges von π
- die Amplituden subtrahieren sich
- bei der Gesamtintensität wird der Interferenzterm subtrahiert

$$I_{\max} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$
- bei gleichen Amplituden tritt eine völlige Auslöschung der Teilwellen ein

Es können sich auch inkohärente Wellen überlagern, dabei addieren sich lediglich die Intensitäten $I = NI_1$.

Interferometrie:

Optische Interferometer sind Instrumente, die durch optische Weglängenunterschiede bedingte Lichtinterferenzen vielseitig ausnutzen.

Prinzip: Aus einem Primärstrahl werden durch Strahlteilung zwei oder mehrere kohärente Teilstrahlen erzeugt, die nach Durchlaufen unterschiedlicher optischer Wege überlagert werden und ein Interferenzmuster erzeugen.

Michelson-Interferometer ist ein Zweistrahlinterferometer.

Fabry-Perot-Interferometer ist ein Vielstrahlinterferometer.

Mit Michelson-Interferometer wurde möglich:

- Test der Gültigkeit der Relativitätstheorie
- Entdeckung der Hyperfeinstruktur von Spektrallinien
- Untersuchung der Gezeitenwirkung des Mondes
- Festlegung der Längeneinheit Meter

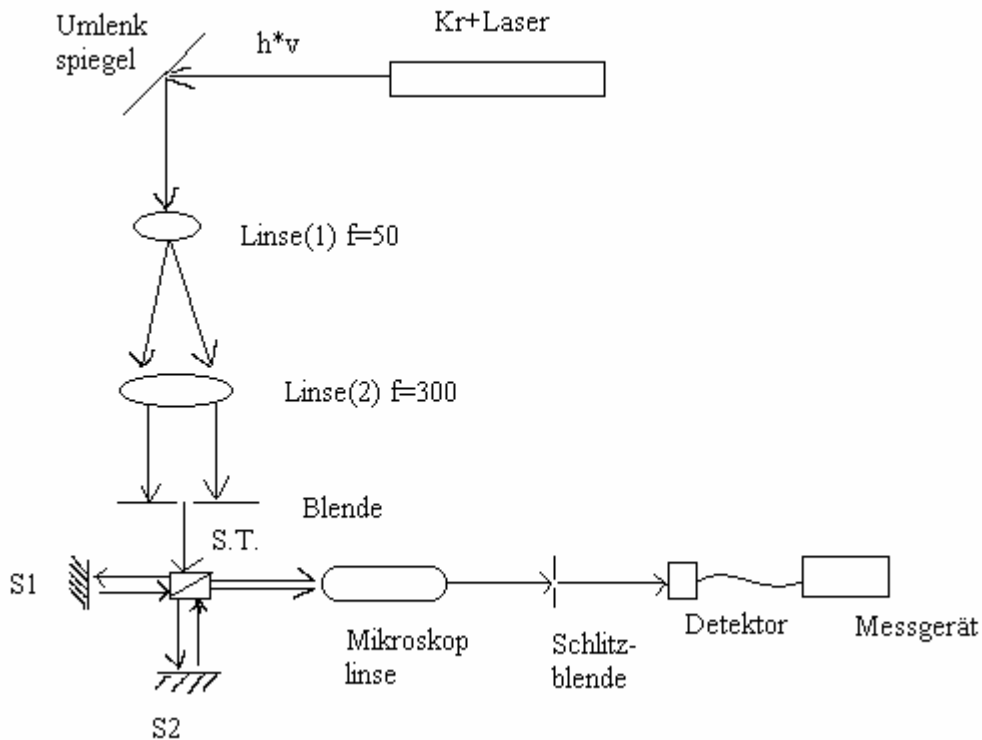
Laser finden Anwendung in z.B. der Spektroskopie, bei der Isotopentrennung und bei Untersuchungen der Reaktionsgeschwindigkeit.

Aufgabenstellung:

Mithilfe von Laserlicht und des Michelson-Interferometers soll die Kohärenzlänge und die Bandbreite des Lichts untersucht werden. Dabei wurde das rote ($\lambda=647\text{nm}$) und das gelbe

($\lambda = 568$) Licht untersucht. Zusätzlich zu dem Versuch soll auf einige zusätzliche Fragestellungen eingegangen werden (siehe Fragen zum Versuch).

Messanordnung, Durchführung



Der Laser schickt einen monochromatischen Lichtstrahl. Dieser wird am Umlenkspiegel umgelenkt und trifft auf den Strahlteiler S.T.. Unterwegs wird er durch eine Linse 1 verbreitert und durch eine Linse 2 parallel ausgerichtet. Die Blende lässt dann nur einen Teil des Lichts durch. Der Strahlteiler erzeugt zwei Strahlen. Der eine Strahl trifft auf den festen Spiegel S2 und wird zurückreflektiert. Der andere Strahl trifft auf den beweglichen Spiegel S1 und wird auch zurückreflektiert. Die Strahlen interferieren am Strahlteiler, werden durch eine Mikroskoplinse gebündelt und erzeugen ein Interferenzmuster an der Schlitzblende. Man kann nun mechanisch entweder das Intensitätsminimum oder –maximum durch die Schlitzblende schicken. Am Detektor wird nun die Strahlleistung P_{\min} bzw. P_{\max} registriert. Das Interferenzmuster kann je nachdem wie die beiden Wellen sich überlagern und mit welcher Phasenverschiebung scharf oder unscharf sein. Die Phasenverschiebung und somit den Kontrast kann man mit dem beweglichen Spiegel regulieren. Im Versuch wird dies auch gemacht. Man fängt an dem Punkt an, an dem beide Spiegel gleich entfernt von dem Strahlteiler sind. Hier ist der Kontrast und die Strahlleistung am größten. Man bewegt dann den Spiegel S1 zum Strahlteiler hin und von diesem wieder weg. Und zwar so weit bis der Kontrast am kleinsten ist und man Intensitätsminimum vom –maximum nicht unterscheiden kann. Dabei wird an jedem Punkt die Strahlleistung des Intensitätsminimums und –maximums gemessen.

Der Strahlteiler und die beiden Spiegel sind das Michelson-Interferometer.

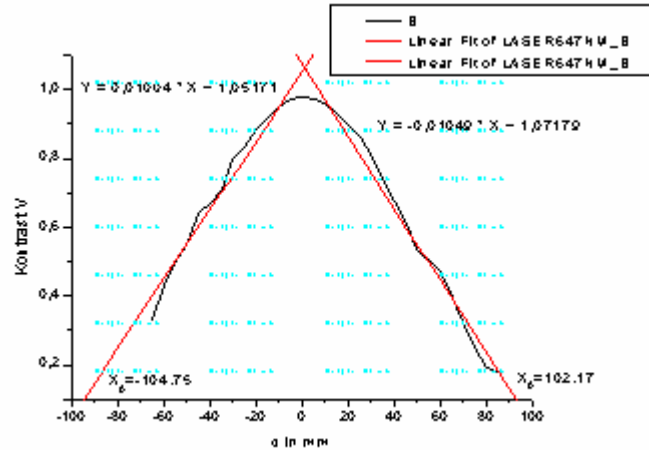
Messergebnisse und Auswertung

$\lambda = 647\text{nm}$

d [mm]	Pmax [μW]	Pmin [μW]	V
-65	36	18	0,333
-60	40	16	0,429
-55	41,5	14	0,495
-50	43,9	12,9	0,546
-45	45,3	9,9	0,641
-40	46,9	9,3	0,669
-35	47	7,9	0,712
-30	48,3	5,5	0,796
-25	52,4	4,8	0,832
-20	52,5	3,2	0,885
-15	53	2,2	0,92
-10	54,5	1,4	0,95
-5	54,5	0,8	0,971
0	52,6	0,6	0,977
5	53,3	0,7	0,974
10	51,9	1,1	0,958
15	51,6	1,8	0,933
20	51,9	2,9	0,894
25	51,5	3,8	0,863
30	50	5,2	0,812
35	48,4	7,3	0,738
40	46,2	8,9	0,677
45	42,7	10,3	0,611
50	42,1	12,8	0,534
60	39,3	14,2	0,469
65	37,2	16	0,398
70	37,2	18,9	0,326
75	33,8	20,4	0,247
80	33	22,4	0,191
85	33	23,2	0,174

$$V = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}); I = P/A, \text{ da aber } A = \text{const.} \Rightarrow V = (P_{\max} - P_{\min}) / (P_{\max} + P_{\min})$$

Trägt man nun den Kontrast gegen den Abstand d auf, so entspricht der auf $x=0$ extrapolierte Wert der Kohärenzlänge l_k :



Die Extrapolation des Graphen liefert zwei Geradengleichungen (dieser wurde von rechts und von links extrapoliert):
 1) $y = 1,07179 - 0,01049x$
 2) $y = 1,05171 + 0,01004x$

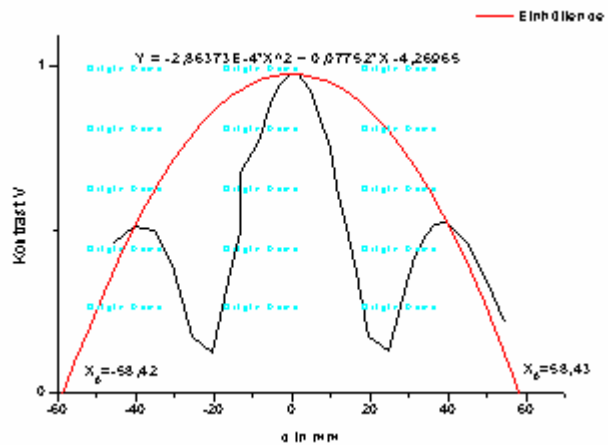
Die Nullstellenbestimmung liefert für 1) $x = 102,17\text{mm}$
 für 2) $x = 104,75\text{mm}$.

Der Mittelwert liefert $x = 103,46\text{mm}$ und somit $l_k = 103,46\text{mm}$. Die spektrale Bandbreite wird zu $\Delta\lambda = \lambda^2 / l_k = (647 \cdot 10^{-9}\text{m})^2 / 103,46 \cdot 10^{-3}\text{m} = 4,05\text{pm}$ bestimmt.

$\lambda = 568\text{nm}$

d [mm]	Pmax [μW]	Pmin [μW]	V
-50	29,8	10,9	0,464
-45	30,7	10	0,509
-40	30,4	10,2	0,498
-35	28,2	12,3	0,393
-30	22,9	16,2	0,171
-25	22,5	17,6	0,122
-20	27,4	11,7	0,402
-18	30,9	10,3	0,500
-15	34,5	6,7	0,675
-13	36,1	4,7	0,770
-10	37,1	2,3	0,883
-8	40,5	1,2	0,942
-5	40,3	0,5	0,975
-3	39,9	0,5	0,975
0	40,8	1,6	0,925
2	39,1	3	0,857
5	37,4	5,4	0,748
7	32,4	7,2	0,636
10	29,9	10,6	0,477
12	26,8	12,4	0,367
15	24,5	17,3	0,172
20	23,7	18,2	0,131
25	29	13,8	0,355
27	29,9	12,3	0,417
30	32,2	11,2	0,484
32	29,2	9,3	0,517
35	30,3	9,4	0,526
40	32	11,8	0,461
45	26,7	13	0,345
50	24	15,5	0,215

Trägt man hier den Kontrast nach d auf, so erhält man drei Maxima. Um die Kohärenzlänge zu bestimmen, wird zunächst eine umhüllende Funktion um die Ausgangsfunktion gelegt:



Die Umhüllende liefert als Gleichung

$$y = -2,86 \cdot 10^{-4} x^2 + 0,08x - 4,27.$$

Die Nullstellen liegen bei $|x_1| = 58,42\text{mm}$ und $x_2 = 58,43\text{mm}$. Der Mittelwert und somit die Kohärenzlänge beträgt $l_K = 58,43\text{mm}$. Daraus folgt eine Bandbreite $\Delta\lambda = 5,5\text{pm}$.

Für das **Etalon** gilt $r = 0,95$; $L = 1\text{cm}$, $\lambda = 647\text{nm}$. Damit lässt sich der freie Spektralbereich bestimmen zu $\Delta\nu = 2,998 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} / 0,02\text{m} = 1,499 \cdot 10^{10} \text{s}^{-1}$, die Halbwertsbreite zu $\nu_H = 2,998 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} \cdot (1 - 0,95^2) / \pi \cdot 0,01\text{m} \cdot 2 \cdot 0,95 = 4,897 \cdot 10^8 \text{s}^{-1}$. Die Finesse des Etalons ist dann $F = \Delta\nu / \nu_H = 1,499 \cdot 10^{10} \text{s}^{-1} / 4,897 \cdot 10^8 \text{s}^{-1} = 30,61$ und das Auflösungsvermögen $A = \nu / \nu_H = 4,6 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1} / 4,897 \cdot 10^8 \text{s}^{-1} = 939350$.

Fehlerbetrachtung

Man hat bei diesem Versuch einige Faktoren, die das Messergebnis beeinflussen können. So wurde die Hälfte des Raumes beleuchtet, das Messgerät hat eine fluktuierende Anzeige, die das Ablesen der Messwerte erschwert. Weiterhin wird der Abstand des beweglichen Spiegels per Lineal und das Durchschicken der Intensitätsmaxima bzw. –minima durch die Schlitzblende mechanisch eingestellt.

Das Umgebungslicht verfälscht das Messergebnis um etwa 9 nW, gemessen wird im μW -Bereich. Dies sind drei Größenordnungen Unterschied und somit der Fehler nicht ausschlaggebend. Der Fehler der fluktuierenden Anzeige lässt sich systematisieren, wenn immer nur eine Person abliest, was bei uns der Fall war. Immerhin konnte man bis auf eine Nachkommastelle genau ablesen. Die Einstellung des Spiegelabstandes lässt sich ebenfalls systematisieren. Das Durchschicken der Intensitätsmaxima bzw. –minima durch die Schlitzblende stellt vor allem bei minimalem Kontrast eine Fehlerquelle dar, weil man dann Intensitätsmaximum vom –minimum kaum unterscheiden kann. Auch dies haben wir versucht zu systematisieren. Man kann also zusammenfassend sagen, dass es zwar hier einige Fehlerquellen gibt, die aber das Messergebnis nur unwesentlich beeinflussen.

Fragen zum Versuch

Frage 1: Wie viele Linien/mm erhält man, wenn zwei Lichtstrahlen ($\lambda = 530\text{nm}$) unter einem Gesamtöffnungswinkel ($\alpha = 5^\circ$) interferieren ?

$$d = \frac{530 \text{ nm}}{2 \cdot \sin 5^\circ} = 3040,534 \text{ nm} \equiv 3,041 \text{ } \mu\text{m}$$

Das bedeutet, dass wir $\frac{1\text{mm}}{3,041 \cdot 10^{-3} \text{ mm}} = 328,84$ Linien pro mm sehen können.

Frage 2: Welche Definition zur Bestimmung der Kohärenzlänge bezogen auf den Abfall des Kontrastes ist sinnvoll ?

Zur Bestimmung der Kohärenzlänge muss der Kontrast minimal bzw. Null sein, da in diesem Punkt die Abstände der Intensitätsmaxima und –minima so klein sind, dass sie nicht mehr aufgelöst und getrennt wahr genommen werden können. So könnte eine Definition lauten, die sicherlich physikalisch richtig wäre. Sinnvoller ist es aber die Kohärenzlänge bei der Hälfte des Kontrastmaximums zu bestimmen, denn dann liegt man in der Halbwertsbreite. Bestimmt man dagegen die Kohärenzlänge bei minimalem Kontrast, so ist man außerhalb der Halbwertsbreite und da können noch andere Moden angeregt werden, wie es bei der Wellenlänge $\lambda = 568$ der Fall ist.

Frage 3: Welche Kohärenzlänge kann weißem Licht (400 bis 700nm) zugeordnet werden ?
Die Kohärenzlänge ist gegeben durch:

$$l_K = \frac{I^2}{\Delta I} = \frac{(550 \text{ nm})^2}{300 \text{ nm}} \approx 1000 \text{ nm} = 1 \text{ } \mu\text{m}$$

Frage 4: Ein FPI habe eine Finesse $F=10000$ und einen Spiegelabstand von $L=5\text{cm}$. Bestimmen sie den Reflexionsgrad R der Spiegel, den freien Spektralbereich, die Halbwertsbreite einer Linie und das Auflösungsvermögen bei $\lambda = 500 \text{ nm}$. Könnte ein solches FPI die Spektrallinien 516.7 und 516.9 eindeutig trennen ?

Freier Spektralbereich:

$$\Delta n = \frac{c}{2 \cdot L} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2 \cdot 0,05m} = 3 \cdot 10^9 s^{-1}$$

Halbwertsbreite:

$$n_H = \frac{\Delta n}{F} = \frac{3 \cdot 10^9 s^{-1}}{10000} = 3 \cdot 10^5 s^{-1}$$

Auflösungsvermögen: $A = v/v_H = (5,996 \cdot 10^{14} s^{-1}) / (3 \cdot 10^5 s^{-1}) = 1998666667$

Reflexionsgrad:

$$n_H = \frac{c \cdot (1 - r^2)}{pL2r} \Leftrightarrow$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p \cdot L \cdot 2 \cdot n_H + 2 \cdot \sqrt{n_H^2 \cdot p^2 \cdot L^2 + c^2}}{c} \quad \wedge \quad r_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p \cdot L \cdot 2 \cdot n_H - 2 \cdot \sqrt{n_H^2 \cdot p^2 \cdot L^2 + c^2}}{c},$$

somit $r_1 = 1,00079$ und $r_2 = 0,99921$

Aus dieser Rechnung können wir schlussfolgern, dass dieser FPI Linienbreiten bis zu $3 \cdot 10^5 s^{-1}$ auflösen kann. Für die Wellenlängen $\lambda = 516,7$ und $516,9$ nm gilt $\Delta v = 2,245 \cdot 10^{11} s^{-1}$ und somit eine Linienbreite $v_H = 2,245 \cdot 10^7 s^{-1}$. Das heißt, dass diese Linie viel breiter ist als diejenige, die der FPI noch auflösen kann und somit könnte dieser die beiden Spektrallinien eindeutig trennen.

Frage 5: Berechnen Sie die Finesse des Michelson-Interferometers ($v_H = 0,5 \Delta v$).

$$F = \Delta v / v_H = 2.$$